

Varianta 51

Subiectul I

- a) $AB = 2\sqrt{2}$.
- b) $d = 2\sqrt{2}$.
- c) M este mijlocul segmentului $(AB) \Rightarrow M(2, 2)$.
- d) $m = 2$.
- e) Mijlocul segmentului (AB) este $M(2, 2)$; $CM = \sqrt{2}$.
- f) $BC = 2$.

Subiectul II

1.

- a) 3 submulțimi.

b) $p = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

- c) Suma soluțiilor ecuației este 0.

d) $C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 16$.

- e) produsul primelor 5 zecimale ale numărului $\sqrt{50}$ este 0.

2.

a) $f'(x) = 3x^2 - 3, x \in \mathbf{R}$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -3$.

- c) $x = -1$ și $x = 1$ sunt puncte de extrem local.

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n^3} = 1$.

e) $\int_1^2 f(x) dx = \frac{17}{4}$.

Subiectul III

- a) Pentru $n = 0$ avem $f_0 = X^2 + 1 = g \Rightarrow g \in G$.

b) $f_n(-1) = 2$.

c) $x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm i$.

d) $f_n(i) = (i^2 + i + 1)^{4n+1} - i = 0$, $f_n(-i) = ((-i)^2 - i + 1)^{4n+1} + i = 0$.

- e) Suma coeficienților polinomului f_1 este $f_1(1) = 242$.

- f) Din teorema împărțirii cu rest $\Rightarrow f_n = (X^2 + 1)q + aX + b$, $a, b \in \mathbf{R}$ Din b) rezultă că $ai + b = 0 \Rightarrow a = b = 0$.

$$\begin{aligned} \text{g)} \quad & f_0(1) + f_1(1) + f_2(1) + \dots + f_n(1) = 3 - 1 + 3^5 - 1 + 3^9 - 1 + \dots + 3^{4n+1} - 1 = \\ & = (3 + 3^5 + 3^9 + \dots + 3^{4n+1}) - n = 3 \cdot \frac{3^{4n+4} - 1}{80} - n. \end{aligned}$$

Subiectul IV

a) $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}, \forall x \in \mathbf{R}.$

b) Din $f'(x) \leq 0, x \in (-\infty, 0]$ și $f'(x) \geq 0, x \in [0, \infty)$ rezultă f strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ și f strict crescătoare pe $[0, \infty)$.

c) Din punctul b) rezultă $x = 0$ punct de minim local.

Din punctul b) rezultă $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}.$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = 0.$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad & \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x' \cdot \ln(x^2 + 1) dx = \ln 2 - \int_0^1 \frac{2x^2}{x^2 + 1} dx = \ln 2 - 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1}\right) dx = \\ & = \frac{\pi}{2} - 2 + \ln 2. \end{aligned}$$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ este asimptotă orizontală la $+\infty$.

g) Folosind b) și c) avem că $f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbf{R}$ cu egalitate pentru $x = 0$, analog pentru y , deci $x = y = 0$.